数理解析研究所講究録
964巻 1996年 113-119

Castelnuovo-Mumford regularity の上限について

宮崎　誓 (Chikashi Miyazaki)
長野工業高等専門学校
381 長野市徳間 716
miyazaki@ei.nagano-nct.ac.jp

本稿では、次数環（射影代数多様体）の Castelnuovo-Mumford regularity の上限をその次数環（射影代数多様体）の基本的な不変量で表す問題を考える。これは、主に、Wolfgang Vogel との共同研究 [19] によるものである。

基礎体 K（任意標数）上の多項式環を $S = K[X_0, \cdots, X_N]$ とし、$\deg X_i = 1$ として次数環の構造をいれる。また、$\mathfrak{m} = (X_0, \cdots, X_N)$ とする。I を S の同次イデアル（以下では、すべて homogeneous case を扱い、単にイデアルという。他の語法もこれに従う。）とし、$R = S/I$, $\dim R = d$ とおく。次数環 R が m-regular であるとは、

$$[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_\ell = 0$$

for all i, ℓ with $i + \ell > m$ が成り立つときをいう (cf. [21])。これは、すべての p に対して S-加群 R の p-th シジジー加群の最小の生成元の次数が $p + m$ 以下であることと同値である (cf. [4])。R が m-regular となる最小の m を R の Castelnuovo-Mumford regularity といい、$\operatorname{reg} R$ と書く。

一般に、次数 S-加群 M、整数 i に対して、

$$a_i(M) = \max\{\ell \in \mathbf{Z} | [H^i_{\mathfrak{m}}(M)]_\ell \neq 0\}$$

と定義する。ここで、$H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ のときは、$a_i(M) = -\infty$ とする。特に、M の a-invariant (cf. [7]) は、$a(M) = a_{\dim M}(M)$ である。そうすると、

$$\operatorname{reg} R = \max\{a_i(R) + i | i \in \mathbf{Z}\}$$

となる。

以下では、R を locally Cohen-Macaulay かつ equi-dimensional（即ち、$\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(R)) < \infty$, $i \neq d$）と仮定する。

さて、整数 $k \geq 0$, $1 \leq r \leq d$ に対して、R が (k,r)-Buchsbaum という概念を導入する (cf. [5, 10, 12, 16, 17])。R が (k,r)-Buchsbaum であるとは、R の任意のパラメータ $f_1, \cdots, f_d$ に対して、

$$\mathfrak{m}^k H^i_{\mathfrak{m}}(R/(f_1, \cdots, f_j)R) = 0$$

for all i, j with $j \leq r-1$ and $i+j < d$ が成り立つときをいう。$(0,r)$-, $(1,d)$-, $(k,1)$-Buchsbaum は、それぞれ、Cohen-Macaulay, Buchsbaum, k-Buchsbaum と同じである。さらに、R に対して、R が k-Buchsbaum となる最小の整数 $k(\geq 0)$ を $k(R)$ と表す。

同様に、体 K 上の $\operatorname{Proj} S = \mathbf{P}^N_K$ の射影部分スキーム X に対して、X が (k,r)-Buchsbaum とは、その座標環 R が (k,r)-Buchsbaum となるときをいい、$k(X) = k(R)$ と定義する。また、X の Castelnuovo-Mumford regularity を $\operatorname{reg} X = \operatorname{reg} R + 1$ と定義する。

さて、X の定義イデアルを I とする。ここで、X を代数多様体、即ち、K が代数閉体で、座標環を $R = S/I$ が整域と仮定する。さらに、X は非退化、即ち、I の最小生成元の次数は 2 次以上とする。$\operatorname{reg} X$ の上限を X の基本的な不変量である $\operatorname{codim} X$ および $\deg X$ を用いて表す問題は、Eisenbud-Goto [4] で述べられた Regularity Conjecture

$$\operatorname{reg} X \leq \deg X - \operatorname{codim} X + 1$$

という予想を巡って、研究されてきた。この辺の状況は、例えば、Bayer-Mumford [2] に書かれている。 1 次元の場合は、[8] で解決され、2 次元、3 次元の非特異な多様体の場合は、それぞれ、[14, 25] によって解決された。また、最近、[13] では、4 次元の場合について、取り組んでいる。

さて、我々の立場では、X の座標環 R の中間次元の局所コホモロジーとの絡みも込めて、$\operatorname{reg} X$ の上限を記述しようというものである。最も易しい場合は、X が arithmetically Cohen-Macaulay、即ち、R が Cohen-Macaulay のときである。この場合は、Uniform Position Principle を用いると容易に、

$$\operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + 1$$

が示せる。Stückrad-Vogel [27, 28] は、もっと一般に、X が arithmetically Buchsbaum、即ち、R が Buchsbaum のときも、

$$\operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + 1$$

が成り立つことを示した。(このことは、Goto による Buchsbaum 加群の構造定理 [6] からも得られる。) そこで、R のコホモロジー的性質が Cohen-Macaulay または Buchsbaum から離れれば、$\operatorname{reg} X$ についての拘束条件が弱くなることは予想される。そこで、locally Cohen-Macaulay and equi-dimensional の refinement である (k,r)-Buchsbaum という言葉で表すという問題を考える。つまり、X を (k,r)-Buchsbaum、即ち、R を (k,r)-Buchsbaum とするとき、

$$\operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + C(k, r, \dim X),$$

と書いて、$C(k,r,\dim X)$ の上限を考える。ここで、$C(k,r,\dim X)$ は、k, r, $\dim X$ のみに依存する定数とする。以下、$k \geq 1$ と仮定する。まず、Nagel-Schenzel [23] (やや弱い形で、Hoa-Miyazaki [11]) によって $C(k,1,\dim X) \leq (2\dim X - 1)\cdot k - d + 1$ が示され、最近、Nagel-Schenzel [24] が $C(k,1,\dim X) \leq \dim X \cdot k$ を示した。一方、Hoa-Vogel [12] は、$C(k,r,\dim X) \leq (r-1)\cdot k + (\dim X + 2 - r)(\dim X + 1 - r)/2 - \dim X + 1$ を示した。

そこで、我々は、[19] で、次の Theorem 1 を得た。

Theorem 1([19, (3.2),(3.3)]). 上の条件で、次が成立する。

$$C(k,r,\dim X) \leq \dim X \cdot k - r + 1$$

$$C(1,r,\dim X) \leq \lceil d/r \rceil$$

上記の定理を証明するために、$\operatorname{reg} R$ の上限を、a-invariant(cf. [7]) を用いて表す。即ち、Theorem 1 の証明のため、[18] で得られた R の (k,r)-Buchsbaum 性についてのスペクトル系列を用いた判定法を用いて、我々はまず、次の Theorem 2, Theorem 3 を得た。

Theorem 2([19, (2.8)]). k および r を $k \geq 1$, $1 \leq r \leq d$ を満たす整数とする。$x_1, \cdots, x_r$ を R の 1 次のパラメータ系の一部とし、R を (k,r)-Buchsbaum とすると、

$$\operatorname{reg}(R) \leq a(R/(x_1,\cdots,x_r)R) + (d-r) + (d - \operatorname{depth} R)k - r$$

が成り立つ。

Theorem 3([19, (2.10)]). r を $1 \leq r \leq d$ を満たす整数とする。$x_1, \cdots, x_r$ を R の 1 次のパラメータ系の一部とし、R を (k,r)-Buchsbaum とすると、

$$\operatorname{reg}(R) \leq a(R/(x_1,\cdots,x_r)R) + (d-r) + \lceil (d - \operatorname{depth} R)/r \rceil - 1$$

が成り立つ。

ここで、Ballico [1] によって導入された semi-uniform position という概念を使って得られる次の補題 (cf. [24, (4.6)]) (基礎体の標数が 0 のときは、Uniform Position Principle として、よく知られている。) 及び Theorem 2, Theorem 3 を用いて、主定理 Theorem 1 が証明される。

Lemma 4. X を代数閉体 K 上の非退化射影代数多様体とし、R をその座標環とする。このとき、

$$a(R) + \dim R \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil$$

が成り立つ。

そこで、Theorem 1 で得られた $C(k,r,\dim X)$ が best possible かどうか、は重要な問いかけである。(もちろん、Buchsbaum の場合は、構造がはっきりしているので、もっと一般の場合にどうかということである。) Miyazaki-Vogel [19, (4.1),(4.2)] で述べたように、$k=1,2$ かつ $r=1$ ($k=2$ の場合は、[19] にもう少し考えて) の場合は、Theorem 1.2 に関しては、すべての次元の sharp な例が存在する。また、X が、arithmetically Buchsbaum のときは、

$$\operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + 1$$

が成り立つが、この等号が成立する X を求める問題は、自然に考えられるところである。これについては、Nagel [22] が、Cohen-Macaulay の場合、また、Yanagawa [29] が、Buchsbaum curve の場合について述べているので、そちらを参照されたい。もっと一般に、Lemma 4 の等号が成り立つ場合については、(Uniform Position にある 0 次元スキームについては、Maroscia [15] の結果があるが、) 一般次元では、よく知られていないと思う。

さて、再び、非退化射影代数多様体 X を $\operatorname{codim} X$, $\deg X$, $\dim X$, $k(X)$ で上限を表す問題に戻って、[24] (cf. [19]) で証明された

$$\operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + \dim X \cdot k(X)$$

が、best possible かという問題に還り、考察してみる。実は、以前、上の式で、$k(X)$ と書いた部分を $\lceil (k(X)+1)/2 \rceil$ とできないか、と考えていた。最近、柳川氏によって、surfaces of minimal degree 上の Cartier 因子として現れる曲線にその反例がある (cf. [30]) との指摘をいただいた。そのことを一般に計算して次の結果が得られる。

$C = \mathbf{P}^1_K$ とし、$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_K} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_K}(-e)$, $(e \geq 0)$ とおく。ここで、ruled surface

$$\pi : X = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to C = \mathbf{P}^1_K$$

について考える。この辺の記号は、[9] に従う。この曲面 X の minimal section、即ち、π の section で自己交点数が最小の曲線を C_0 とし、π のファイバーの一つを f とおくと、$\operatorname{Pic}(X) = \mathbf{Z} \cdot C_0 \oplus \mathbf{Z} \cdot f$ となる。ここで、$H = C_0 + n \cdot f$, $(n > e)$ とおくと、H は、very ample になるので (see, e.g., [9])、X の H による埋め込み $\iota : X \to \mathbf{P}^{2n-e+1}_K$ を考える。そこで、X の Cartier divisor $D = a \cdot C_0 + b \cdot f$ をとる。$a > 0, b > an$ のときは、D と linearly equivalent である nonsingular irreducible curve Y がとれる。もちろん、Y は、$\mathbf{P}^{2n-e-1}_K$ 内の非退化代数曲線である。

Proposition 5. 上の条件の下で、X 上の非退化射影代数曲線 $Y(\subset \mathbf{P}_K^{2n-e+1})$ とその座標環 R に対して、

$$\deg Y = a(n-e)+b,\ k(Y) = \lfloor (b-ae-2)/(n-e) \rfloor - a + 1$$

$$a_1(R) = \begin{cases} \lfloor (b-ae-2)/(n-e) \rfloor & \text{if } r.h.s. \geq a, \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a_2(R) = a-2,\ \operatorname{reg} Y = \lfloor (b-ae-2)/(n-e) \rfloor + 2$$

が成り立つ。

まず、$C_0^2 = -e$, $C_0.f = 1$, $f^2 = 0$ であるから、$\deg Y = (a \cdot C_0 + b \cdot f).(C_0 + n \cdot f) = a(n-e)+b$ である。また、Y の X に対するイデアル層を $\mathcal{I}_{Y/X}$ とすれば、

$$\oplus_{\ell \in \mathbf{Z}} \mathcal{I}_{Y/X}(\ell) \cong \oplus_{\ell \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}((\ell - a) \cdot C_0 + (\ell n - b) \cdot f)$$

であり、このことから、

$$H^1_{\mathfrak{m}}(R) \cong \oplus_{\ell \in \mathbf{Z}} H^1(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}((\ell - a) \cdot C_0 + (\ell n - b) \cdot f))$$

および

$$a_2(R) = \max\{\ell \in \mathbf{Z} | H^2(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}((\ell - a) \cdot C_0 + (\ell n - b) \cdot f)) \neq 0\}$$

がいえる。よって、 $H^1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(\alpha \cdot C_0 + \beta \cdot f))$ と $H^2(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(\alpha \cdot C_0 + \beta \cdot f))$ の計算に帰着できる。実際、$H^1 \neq 0$ となるための α, β の条件は、$\alpha \geq 0$, $\beta \leq e\alpha - 2$ または$\alpha \leq -2$, $\beta \geq e\alpha + e$ であり、$H^2 \neq 0$ となるための条件は、$\alpha \leq -2$, $\beta \leq -2-e$ となることがわかる。このことから、Proposition 5 は証明される。

Proposition 5 を使うと、$0< b - an - 1 \leq 2n - e$ を満たす Y をとれば、

$$\operatorname{reg} Y \leq \lceil (\deg Y - 1)/\operatorname{codim} Y \rceil + k(Y)$$

の等号が成立することがわかる。

この原稿を書くに当たって、柳川浩二氏（名大）とのディスカッションが大変参考になったことと、この短期共同研究をまとめて下さった宮崎充弘氏（京都教育大）に対して大変感謝していることを、最後に書き記して終わります。

参考文献

[1] E. Ballico, On singular curves in positive characteristic, Math. Nachr. 141(1989), 267-273.

[2] D. Bayer and D. Mumford, What can be computed in algebraic geometry? Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (ed. D. Eisenbud and L. Robbiano), pp. 1-48, Cambridge University Press, 1993.

[3] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry, GTM 150, Springer 1994.

[4] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, J. Algebra 88(1984), 89-133.

[5] M. Fiorentini and W. Vogel, Old and new results and problems on Buchsbaum modules, I, Sem. Geom. Univ. Studi Bologna 1988-1991(1991), 53-61.

[6] S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, Advanced Studies in Pure Mathematics 11, Commutative Algebra and Combinatorics, pp. 39-64, Kinokuniya/North Holland, 1987.

[7] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan 30(1978), 179-213.

[8] L. Gruson, R. Lazarsfeld and C. Peskine, On a theorem of Castelnuovo and the equations defining projective varieties, Inv. Math. 72(1983), 491-506.

[9] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, GTM 52, Springer, 1977.

[10] L. T. Hoa, R. M. Mirò-Roig and W. Vogel, On numerical invariants of locally Cohen-Macaulay schemes in $\mathbf{P}^n$, Hiroshima Math. J. 24(1994), 299-316.

[11] L. T. Hoa and C. Miyazaki, Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for generalized Cohen-Macaulay graded rings, Math. Ann. 301(1995), 587-598.

[12] L. T. Hoa and W. Vogel, Castelnuovo-Mumford regularity and hyperplane sections, J. Algebra 163(1994), 348-365.

[13] S. Kwak, Castelnuovo regularity for smooth subvarieties of dimension 3 and 4, preprint.

[14] R. Lazarsfeld, A sharp Castelnuovo bound for smooth surfaces, Duke Math. J. 55(1987), 423-438.

[15] P. Maroscia, Some problems and results on finite sets of points in $\mathbf{P}^n$, Lecture Notes in Math. 997, Algebraic Geometry – Open Problems, pp. 290-314, Springer, 1983.

[16] C. Miyazaki, Graded Buchsbaum algebras and Segre products, Tokyo J. Math. 12(1989), 1-20.

[17] C. Miyazaki, Spectral sequence theory of graded modules and its application to the Buchsbaum property and Segre products, J. Pure Appl. Algebra, 85(1993), 143-161.

[18] C. Miyazaki, Spectral sequence theory for generalized Cohen-Macaulay graded modules, Commutative Algebra 1992 ICTP, Trieste, Italy (ed. A. Simis, N. V. Trung and G. Valla), pp. 164-176, World Scientific, Singapore, 1994.

[19] C. Miyazaki and W. Vogel, Bounds on cohomology and Castelnuovo-Mumford regularity, J. Algebra (to appear).

[20] C. Miyazaki and W. Vogel, Towards a theory of arithmetic degrees, Manuscripta Math. (to appear).

[21] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Ann. Math. Studies 59, Princeton University Press, 1966.

[22] U. Nagel, On the defining equations and syzygies of arithmetically Cohen-Macaulay varieties in arbitrary characteristic, J. Algebra 175(1995), 359-372.

[23] U. Nagel and P. Schenzel, Cohomological annihilators and Castelnuovo-Mumford regularity, Contemp. Math. 159(1994), 307-328.

[24] U. Nagel and P. Schenzel, Degree bounds for generators of cohomology module and Castelnuovo-Mumford regularity, preprint.

[25] Z. Ran, Local differential geometry and generic projections of threefolds. J. Diff. Geo. 32(1990), 131-137.

[26] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, Springer, 1986.

[27] J. Stückrad and W. Vogel, Castelnuovo bounds for certain subvarieties in $\mathbf{P}^n$, Math. Ann. 276(1987), 341-352.

[28] J. Stückrad and W. Vogel, Castelnuovo bounds for locally Cohen-Macaulay schemes, Math. Nachr. 136(1988), 307-320.

[29] K. Yanagawa, On the regularities of arithmetic Buchsbaum curves, Math. Z. (to appear).

[30] K.Yanagawa, Personal communication.